Redes de dos puertos

Para el puerto i, el voltaje V_i y la corriente I_i bajo condiciones de estado estacionario están dados por

$$V_i = V_i^+ + V_i^- \tag{1}$$

$$I_i = \frac{1}{Z_{0i}}\left[V_i^+ - V_i^-\right] \tag{2}$$

donde V_i^+, V_i^- son los voltajes incidente y reflejado respectivamente y Z_{0i} es la impedancia característica del puerto i. Se puede resolver (1) y (2) para encontrar los voltajes incidentes y reflejados en términos del voltaje total y la corriente total en el puerto i:

$$V_i^+ = \frac{1}{2}\left(V_i + Z_{0i} I_i\right) \tag{3}$$

$$V_i^- = \frac{1}{2}\left(V_i - Z_{0i} I_i\right) \tag{4}$$

Asumiendo los puertos sin pérdidas, Z_{0i} es real y la potencia promedio incidente en el puerto i es

$$P^+ = \frac{1}{2}\Re\left\{V_i^+\left(I_i^+\right)^*\right\} = \frac{1}{2}\Re\left\{V_i^+\left(\frac{V_i^+}{Z_{0i}}\right)^*\right\} = \frac{1}{2 Z_{0i}}\left|V_i^+\right|^2 \tag{5}$$

$$P^- = \frac{1}{2}\Re\left\{V_i^-\left(I_i^-\right)^*\right\} = \frac{1}{2}\Re\left\{V_i^-\left(\frac{V_i^-}{Z_{0i}}\right)^*\right\} = \frac{1}{2 Z_{0i}}\left|V_i^-\right|^2 \tag{6}$$

Entonces a_i y b_i se definen de manera que el cuadrado de sus magnitudes representan la potencia que fluyen en las direcciones respectivas.

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{2 Z_{0i}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i + Z_{0i} I_i}{\sqrt{2 Z_{0i}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} + \sqrt{Z_{0i}}\, I_i\right) \tag{7}$$

$$b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{2 Z_{0i}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i - Z_{0i} I_i}{\sqrt{2 Z_{0i}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} - \sqrt{Z_{0i}}\, I_i\right) \tag{8}$$

Las undidades de a_i, b_i son

$$\sqrt{\text{Vatio}} = \frac{\text{Voltio}}{\sqrt{\text{Ohmio}}} = \text{Amp}\,.\sqrt{\text{Ohmio}}$$

La potencia disponible de la fuente, en el puerto 1 es

$$P_1^+ = \left|a_1\right|^2$$

La potencia reflejada en el puerto 1 es

$$P_1^- = |b_1|^2$$

y la potencia entregada al puerto 1 (y así, a la red), es

$$P_1 = P_1^+ - P_1^- = |a_i|^2 - |b_i|^2$$

Considere el siguiente diagrama de una red de dos puertos, la figura 1:

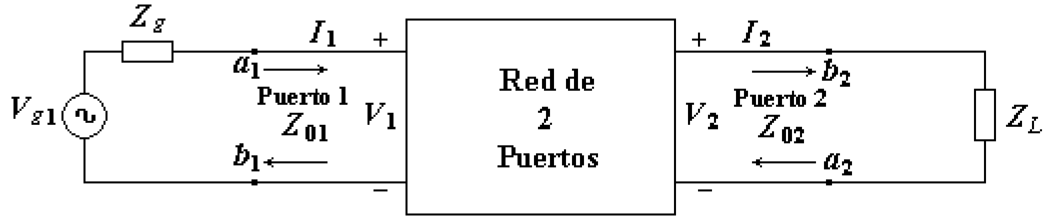

Figura 1. Una red de dos puertos alimentada con una fuente y conectada a una carga.

Hay una fuente de voltaje V_{g1} conectado al puerto 1, mientras que el puerto 2 está conectado a una impedancia de carga Z_L. La impedancia de la fuente es Z_g. Se puede apreciar varios voltajes, corrientes y ondas de voltajes en el diagrama. Se asume que las impedancias características de los puertos 1 y 2 son Z_{01} y Z_{02}, respectivamente. La impedancia de entrada Z_1 en el puerto 1 de la red se define como la impedancia vista en los terminales del puerto 1 cuando el puerto 2 está conectado a la impedancia de carga Z_L mientras V_{g1} y Z_g están desconectados. De igual forma la impedancia de salida Z_2 en el puerto 2 de la red se define como la impedancia vista en los terminales del puerto 2 con Z_L desconectada y V_{g1} reemplazado con un corto. Así, Z_g es la impedancia de carga del puerto 1 en este caso. La impedancia de entrada Z_1 y la impedancia de salida Z_2 son responsables por el coeficiente de reflexión de entrada Γ_1 y el coeficiente de salida Γ_2, respectivamente. El cociente b_1 a a_1 representa Γ_1 mientras b_2 a a_2 es Γ_2.
Para la red de dos puertos,

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \tag{9}$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \tag{10}$$

El coeficiente de reflexión de la carga Γ_L es

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} = \frac{a_2}{b_2} \tag{11}$$

Observe que b_2 sale del puerto 2 y es incidente en la carga Z_L. De igual forma la onda reflejada de la carga entra al puerto 2 como a_2.
El coeficiente de reflexión de la fuente Γ_g se obtiene de

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_{01}}{Z_g + Z_{01}} = \frac{a_1}{b_1} \tag{12}$$

Como b_1 sale del puerto 1, es incidente en Z_g mientras a_1 es la onda reflejada de Z_g.
Los coeficientes de reflexión de entrada y de salida son, respectivamente,

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_{01}}{Z_1 + Z_{01}} = \frac{b_1}{a_1} \tag{13}$$

$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}} = \frac{b_2}{a_2} \tag{14}$$

Al dividir (9) por a_1 y luego usar (13),

$$\frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_{01}}{Z_1 + Z_{01}} = S_{11} + S_{12}\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \tag{15}$$

Al dividir (10) por a_2 y luego combinar con (11), se obtiene

$$\frac{b_2}{a_2} = S_{22} + S_{21}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{1}{\Gamma_L} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{1 - S_{22}\Gamma_L}{S_{21}\Gamma_L} \tag{16}$$

De (15) y (16) se obtiene

$$\Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \tag{17}$$

Si el puerto 2 está conectado a una impedancia acoplada (= Z_{02}), $\Gamma_L = 0$ y (17) se reduce a $\Gamma_1 = S_{11}$.
De igual forma, de (10) y (14) se obtiene

$$\frac{b_2}{a_2} = \Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}} = S_{22} + S_{21}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \tag{18}$$

De (9) y (12) se obtiene

$$\frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12}\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = \frac{1}{\Gamma_g} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{1 - S_{11}\Gamma_g}{S_{12}\Gamma_g} \tag{19}$$

Al sustituir (19) en (18) se obtiene

$$\Gamma_2 = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_g}{1 - S_{11}\Gamma_g} \tag{20}$$

Si $Z_g = Z_{01}$, el puerto 1 está acoplado y $\Gamma_g = 0$. Luego (20) se reduce a $\Gamma_2 = S_{22}$.
Así, S_{11} y S_{22} se determinan al evaluar los coeficientes de reflexión en los puertos respectivos mientras el otro puerto está acoplado.
Para determinar los otros 2 parámetros S_{12} y S_{21} de la red de dos puertos, por ejemplo S_{21},

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0} \tag{21}$$

Ahora a_2 se determina de (7) al sustituir $i = 2$ e igualándola a cero:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_2 + Z_{02} I_2}{\sqrt{2 Z_{02}}}\right) = 0 \Rightarrow V_2 = -Z_{02} I_2 \quad (22)$$

Al sustituir (22) en la expresión para b_2, obtenido de (8) con $i = 2$,

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_2 - Z_{02} I_2}{\sqrt{2 Z_{02}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-Z_{02} I_2 - Z_{02} I_2}{\sqrt{2 Z_{02}}}\right) = -I_2 \sqrt{\frac{Z_{02}}{2}} \quad (23)$$

Una expresión para a_1 se obtiene de (7) con $i = 1$. Cuando $Z_g = Z_{01}$ se reduce a

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_1 + Z_{01} I_1}{\sqrt{2 Z_{01}}}\right) = \frac{V_{g1}}{2\sqrt{2 Z_{01}}} \quad (24)$$

S_{21} se obtiene al sustituir (23) y (24) en (21).

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \frac{\left(\frac{-\sqrt{Z_{02}} I_2}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{V_{g1}}{2\sqrt{2 Z_{01}}}\right)} = \frac{2 V_2}{V_{g1}} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (25)$$

con

$$V_2 = -Z_{02} I_2 \quad (26)$$

De igual forma

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \frac{2 V_1}{V_{g2}} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (27)$$